



ریاضیات دوره‌ی ابتدایی و الگوها (۴)

## سرنوشت الگوها: گسترش مفاهیم تفکر جبری در ریاضیات ابتدایی

جبر یکی از اجزای اصلی برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای در اغلب کشورهاست. عده‌ای اعتقاد دارند که جبر دروازه‌ای به تحصیلات و فرصت‌های عالی‌تر است و مشارکت موفق در جامعه‌ی دموکراتیک و بازار فناوری، نیازمند تفکر مجرد ریاضی نهفته در جبر است. در برنامه‌ی درسی ملی جمهوری اسلامی ایران نیز «جبر و نمایش نمادین (الگوها، رابطه‌ها و تابع‌ها)» دسته‌ای از مفاهیم قلمرو حوزه‌ی ریاضیات برشمرده شده است (سند برنامه‌ی درسی ملی، اسفند ۹۱، ص ۳۴). دانش‌آموزان در سطوح گوناگون با جبر مشکل دارند. یکی از اصلی‌ترین این مشکلات گذر از حساب به جبر است. همچنین است تفاوت‌هایی که در مفهوم نماد تساوی در این دو حوزه وجود دارد یا استفاده از تعمیم‌های نادرست نمادین. حل معادله، کار با نمادها و عبارتهای جبری و درک حروف به جای مقدارهای متغیر یا مجهول از دیگر چالش‌های اساسی یاددهی - یادگیری جبر مدرسه‌ای هستند. از این رو، آموزشگران براساس نتایج تحقیقات به این باور رسیده‌اند که اگر تفکر جبری از دوره‌ی ابتدایی آموزش داده شود، در سال‌های بالاتر مدرسه، مشکلاتی که برشمردیم، کمتر خواهد شد. البته آموزش جبر از پایه‌های پایین‌تر در مدرسه، چیزی به غیر از انتقال برنامه‌ی سنتی سال اول جبر به پایه‌های پایین‌تر است!

در مطلب پیش رو سعی داریم عناصر آموزش تفکر جبری در ریاضیات دوره‌ی ابتدایی جمهوری اسلامی ایران را به اختصار معرفی کنیم و رابطه‌ی طولی آن مفاهیم را در کتاب‌های درسی ریاضی شش پایه‌ی این دوره نشان دهیم. این عناصر عبارت‌اند از: الگوها؛ رابطه‌ها؛ تابع‌ها؛ نمادگذاری.

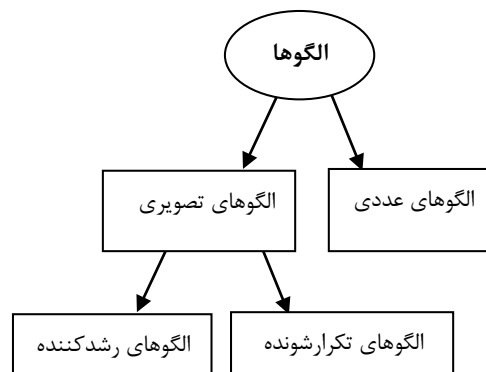
### رابطه‌ها

مهم‌ترین رابطه‌هایی که در ریاضیات دوره‌ی ابتدایی باید به آن‌ها توجه شود، رابطه‌ی بین مفاهیم حساب است؛ یعنی ارتباط بین عددها، ارتباط اعداد با چهار عمل اصلی، و ارتباط خود اعمال با یکدیگر. این روابط در کتاب‌های ریاضی شش پایه‌ی ابتدایی عبارت‌اند از:

- ارتباط عددها با یکدیگر (به‌عنوان نمونه: هشت یکی کمتر از هفت است، دو تا چهار است، پنج تا از سه بیشتر است و ...) و الگوهای موجود در این روابط.
- جمع‌های ثابت: جفت عددهایی که مجموع ثابت دارند و الگوهای موجود در این جمع‌ها، مانند ۰ و ۱، ۲ و ۳، ۴ و ۵، ۴ و ۵، ۳ و ۴، ۲ و ۳، ۱ و ۲، ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۰.
- ضرب‌های یک عدد و الگوهای موجود در جدول ضرب اعداد.
- رابطه‌ی عمل جمع با عمل تفریق.
- رابطه‌ی عمل ضرب با عمل جمع.
- رابطه‌ی عمل ضرب با عمل تقسیم.
- رابطه‌ی عمل تقسیم با عمل تفریق.
- روابط موجود در جدول‌های تناسب.

### الگوها

در سه شماره‌ی گذشته‌ی مجله، الگوهایی را که در کتاب‌های درسی دوره‌ی ابتدایی آمده‌اند به تفصیل معرفی کردیم:





یا تفریق متناظر هستند. در پایه‌ی چهارم دبستان، ماشین‌ها متناظر با ضرب یا تقسیم هستند (ص ۱۲)

و علاوه بر نمایش تصویری، جدول مقادیر ورودی و خروجی نیز معرفی شده است. آشنایی با نمایش‌های مختلف یک مفهوم (تصویر، نماد، جدول برای مفهوم تابع) و توانایی حرکت بین این بازنمایی‌ها و استفاده‌ی مناسب و به جا از هر یک از آن‌ها در موقعیت‌های متفاوت، از دیگر توانایی‌های لازم در آموزش جبر است که در رویکرد تابعی می‌توان به آن توجه خاص کرد. متأسفانه این نمایش (ماشین‌های ورودی - خروجی) و قابلیت‌های آموزشی آن‌ها، در همین پایه رها می‌شوند.

مفهوم مقدار متغیر هم در این ماشین‌ها وجود دارد و هم در پایه‌ی سوم دبستان در مسائل کلامی که با راهبرد الگویابی حل می‌شوند (ص ۹). در تصویر زیر از کتاب ریاضی سوم دبستان از بازنمایی جدول برای نمایش تغییرات در یک مقدار و وابستگی مقداری دیگر به آن (وابستگی سود به تعداد بیسکویت‌ها) استفاده شده است. بازنمایی تصویری ماشین نیز می‌تواند در درک متغیر بودن مقادیر و وابستگی آن‌ها به یکدیگر مفید باشد.

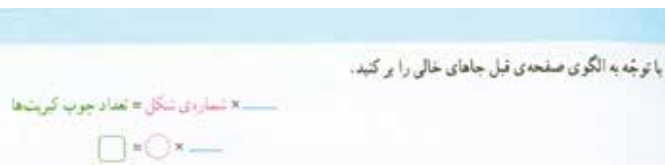


### متغیرها و توابع

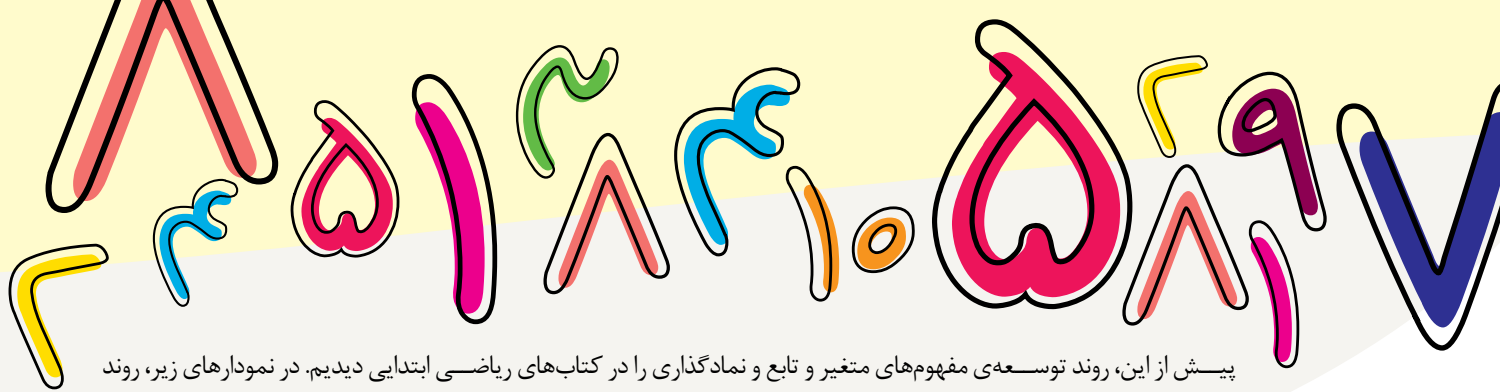
از نقطه‌نظر تاریخی، گرچه تابع رسماً جزئی از جبر نبوده است ولیکن امروزه بسیاری از محققان رویکردی برای شروع جبر در ریاضیات مدرسه‌ای را قبول دارند که در آن «متغیر» و «تابع» دو مفهوم کلیدی هستند. در یک رابطه (فرمول)، متغیر، کمیتی است که مقدار آن تغییر می‌کند. تابع یک شیء ریاضی است که نشان می‌دهد چگونه یک متغیر وابسته به متغیر دیگری در حال تغییر است. آموزش مفهوم متغیر و نمایش آن با حروف در جبر همواره چالش‌های جدی داشته و دارد. در رویکردهای جدید آموزشی، مفهوم تابع و متغیر به صورت‌های گوناگون وارد ریاضیات دوره‌ی ابتدایی شده است. در کتاب‌های ریاضی ابتدایی ایران، ماشین‌های ورودی و خروجی در واقع نمایش تصویری تابع و متغیرهای عددی هستند. این ماشین‌ها در کتاب ریاضی سوم دبستان (ص ۱۳) معرفی می‌شوند. در این پایه، ماشین‌ها با عملیات جمع

### نمادگذاری

یکی از مهم‌ترین جنبه‌های جبر، نمادها هستند. در واقع، می‌توان جبر را یک سیستم نمادین دانست، که احتمالاً با نظریه‌ی مجموعه‌ها و اعمال منطقی و عمل روی اعضایی به جز اعداد حقیقی سر و کار دارد. اما در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای، نمادها باید برای کمک به جنبه‌های دیگر تفکر جبری توسعه پیدا کنند؛ یعنی درک و شناخت الگوها، روابط، توابع و متغیرها، و گذر از حساب. در اینجا قصد نداریم به اینکه چه روشی برای آغاز معرفی نمادگذاری مناسب است بپردازیم. تنها آنچه را در کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی آمده است



مور می‌کنیم. استفاده از نماد برای نمایش روابط، نخستین بار در کتاب ریاضی ششم ابتدایی آمده است (ص ۲). نمایش کلی عددهای زوج یا عددهای فرد با استفاده از شکل‌های مربع یا دایره در واقع آغاز معرفی نماد به‌عنوان زبانی برای بیان روابط است. این معرفی برای نمایش ضرب‌های اعداد نیز ادامه می‌یابد و در واقع توسعه‌ی نمادگذاری در دوره‌ی ابتدایی به همین جا ختم می‌شود.



پیش از این، روند توسعه‌ی مفهوم‌های متغیر و تابع و نمادگذاری را در کتاب‌های ریاضی ابتدایی دیدیم. در نمودارهای زیر، روند توسعه‌ی الگوها و روابط را می‌بینید:

رشد الگوهای عددی

ص ۴۵ و ۶۲

ص ۹۸

پایه دوم دبستان  
ص ۱۳۳

الگوی تصویری رشدکننده متناظر با الگوهای عددی رشدکننده خطی (مضارب یک عدد) و آغاز جدول ضرب

پایه دوم دبستان  
ص ۹۸

الگوی تصویری رشدکننده متناظر با الگوهای عددی رشدکننده درجه‌ی ۲

پایه دوم دبستان  
ص ۹۸ و ۶۲

الگوهای رشدکننده عددی: خطی - درجه‌ی ۲

پایه دوم دبستان  
از ص ۲۶

الگوهای رشدکننده عددی: مضارب یک عدد (مضارب ۲، مضارب ۳، ...)

پایه اول دبستان  
ص ۱۶۱ تا ۱۲۲

الگوهای رشدکننده عددی و تصویری: چند تا چند تا شمردن (از سه تا سه تا تا ده تا ده تا)

پایه اول دبستان  
ص ۱۲۱

آشنایی با الگوهای رشدکننده عددی و تصویری: دو تا دو تا شمردن

### رابطه‌ی طولی

الگوهای رشدکننده (تصویری - عددی)

پایه دوم دبستان  
ص ۲۷ - ۴۴ - ۱۱۱

آشنایی با الگوهای تصویری تکرار شونده پیچیده‌تر با ۴ رنگ و واحد ۵تایی

پایه اول دبستان  
از ص ۵۳

توانایی تشخیص واحد تکرار شونده در الگوهای تصویری تکرار شونده ساده

پایه اول دبستان  
ص ۱۳۸ تا ۱۴

آشنایی با الگوهای تصویری دو بعدی در صفحه‌های چهارخانه شکل‌های ساده

پایه اول دبستان  
ص ۱۲۵ تا ابتدای کتاب

آشنایی با الگوهای تصویری تکرار شونده با واحدهایی براساس رنگ، شکل، تعداد، حداکثر ۳ رنگ، حداکثر واحد ۴ تایی

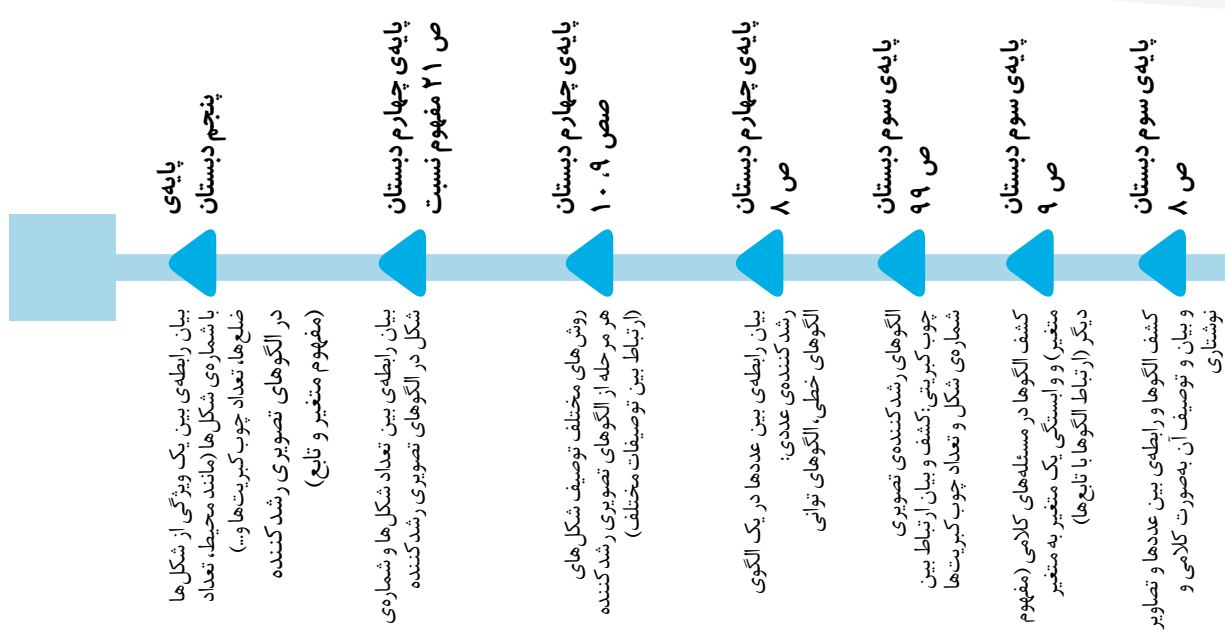
### رابطه‌ی طولی

الگوهای تصویری تکرار شونده



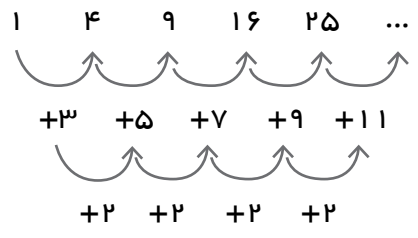
پایه پنجم دبستان  
کتاب ریاضیات پایه پنجم دبستان

پایه چهارم دبستان  
کتاب ریاضیات پایه چهارم دبستان



### الگوهای عددی درجه‌ی دو

الگوی زیر یک الگوی عددی درجه ۲ است:

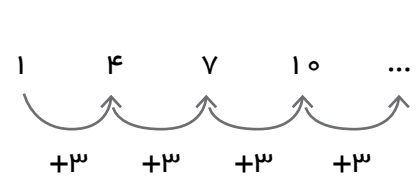


در یک الگوی عددی درجه ۲، اختلاف جملات با نظم مشخصی افزایش (کاهش) می‌یابد. در واقع اختلاف بین جملات، خودش یک الگوی عددی خطی است. از این رو، برای بیان رابطه‌ای برای جمله‌ی  $n$ ام این نوع الگوها، به عبارتی بر حسب  $n^2$  نیاز داریم. به عنوان مثال، در الگوی عددی بالا،  $n^2$  نشان‌دهنده‌ی  $n$ امین جمله‌ی دنباله است. الگوی زیر یک الگوی عددی درجه ۲ است که  $n$ امین جمله‌ی آن  $3+2n^2$  می‌باشد: ... ۳ ۵ ۱۱ ۲۱

شما آن را تحلیل کنید.

### الگوهای عددی خطی

الگوی زیر یک الگوی عددی خطی است:



در الگوهای عددی خطی، هر جمله از جمله‌ی قبل به مقدار ثابتی بزرگ‌تر (یا کوچک‌تر) است. برای بیان جمله‌ی  $n$ ام این الگوها، رابطه‌ای برحسب  $n$  (عدد طبیعی است) به دست می‌آید. به عنوان مثال،  $n$ امین عدد در الگوی بالا  $3+(n-1)$  است. در واقع تمام شکل‌ها یا الگوهای عددی که در آن‌ها داریم چند تا چند تا می‌شماریم (رو به جلو یا رو به عقب)، الگوهای عددی خطی هستند.